УДК 004.942

В.І. ШЕКЕТА, канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ ПРЕМОНОЇДНОЇ ДЕДУКЦІЇ В СЕМАНТИЧНИХ СТРАТЕГІЯХ МОДИФІКАЦІЙНИХ ПРЕДИКАТНИХ ЗАПИТІВ

Показано спосіб побудови процедур одержання ланцюга премоноїдних інтерпретацій модифікаційних предикатних запитів із премоноїдною ко-границею, яка може бути розширена до рівня моделі модифікаційних предикатних запитів. Введено транзитивну систему для премоноїдних дедукцій модифікаційних предикатних запитів, як розширення базової транзитивної системи для категорійної дедукції через введення премоноїдних уніфікаторів. Введені реіндексуючі функтори виконують відображення дедукції і зберігають введені премоноїдні структури, що дозволяє виконати оголошення скінченної премоноїдної інтерпретації, яка є основою для побудови премоноїдної моделі модифікаційних предикатних запитів. Виконано побудову премоноїдної індексованої категорії із підкатегорією простих премоноїдних дедукцій із фіксованими доменами і *ко*-доменами.

The method is proposed for procedures construction for getting of premonoidal interpretations chain of modifications predicate queries with premonoidal co-limit which can be extended to the level of an model for modification predicate queries. The transitive system is introduced for premonoidal deductions of modification predicate queries, as extension of the base transitive system for categorical deduction through adding of premonoidal unificators. The introduced reindexed executes mappings of deductions and preserves the entered premonoidal structures, that allows to execute declaration of finite premonoidal interpretation which is the basis for construction of premonoidal model of modification predicate queries. The construction of premonoidal indexed category is done with the subcategory of simple premonoidal deductions with the fixed domains and co-domains and with natural in quality of the selected elements.

Постановка проблеми. Категорійні підходи до логічного програмування з’явилися разом із категорійним підходом до процедури уніфікації [1 – 9]. Основним результатом стало введення категоріальної формалізації для синтаксису логіки тверджень Хорна, і її розширення на основі семантики теоретичних топосів. В [10] розвиваючи деякі базові ідеї, сформульовані в [11], виконано категоріальний аналіз логічних програм і виконано побудову відповідних моделей на основі використання індексованих моноїдних категорій.

Всі ці підходи зосереджені на побудові суто теоретико-операційних моделей. В той же час мало уваги приділяється застосуванню денотаційних семантик до побудови операторів на зразок оператора безпосереднього слідування, який є суто важливим із точки зору побудови логічних програм і дослідження їх семантик [12]. Більшість досліджень семантик логічних програм зосереджено на побудові формальних конструкцій на основі теорії фіксованих значень. Тому, саме з цих причин доцільним є подальше дослідження застосувань категорійного апарату, який включає в себе семантики на основі фіксованих значень. Першою роботою даного напрямку була робота [13] в якій було введено поняття категоріального синтаксису над множиною скінчених категорій. Це послужило вихідним пунктом для введення як поняття категорійної дедукції, так і денотаційних семантик, що є відповідниками семантик коректних рішень для логічних Хорн-програм. Такі семантики можуть бути обчислені на основі конструкцій для фіксованих значень, що не виходить за рамки категоріальної дедукції. Однією із переваг такого підходу є те, що категорія термів не обов'язково повинна співпадати з відповідною алгебраїчною категорією для заданої множини функціональних символів.

Всі рішення в нафтогазовій предметній області приймаються на основі аналізу висновків експертів, спеціалістів з великим досвідом роботи. В роботі [14] база знань інформаційної системи розглядається як набір інформаційних сутностей атомарних предикатів з деякого скінченого інформаційного простору $\Re$. Всі зміни, що відбуваються в базі знань, розглядаються, як наслідок модифікаційних предикатних запитів Q_m. Основою самих запитів є набір модифікаційних предикатних правил:

$$Q_m \leftrightarrow (K_B)^{<<} \left\| \begin{matrix} K_{B_-}(o) \\ K_{B_+}(o) \end{matrix} \right. << \ ,$$

де $o, o_n, p_n \in \Re$. $K_{B_+}(o)$ означає, що атомарний предикат o повинен бути включений в базу знань K_B; K_{B_-} означає, що o – повинен бути виключений з бази знань; $(K_B)^{<<}$ – означає модифікацію бази знань на рівні логічної зв'язаності предикатних правил як наслідок виконання операцій додавання і вилучення правил; $<<$ – дескриптор модифікації, який розглядається, як категорійна стрілка. Недослідженим залишається питання категорійної інтерпретації самих модифікаційних предикатних запитів.

Таким чином, метою даної статті є введення і дослідження категорійної моделі модифікаційних предикатних запитів на основі денотаційної семантики в рамках теорій фіксованих значень [15, 16] і категоріальної дедукції.

Для заданої скінченої категорії добутків термів K, ми знаємо, що Моностріли можна розглядати, як предикати. Припустимо, що ми хочемо побудувати модифікаційний предикатний запит використовуючи множину предикатів $X_1, \ldots, X_k$ типів $\theta_1, \ldots, \theta_k$.

Основна ідея яку ми прагнемо досягнути в даному дослідженні є побудова синтаксичної категорії в якій значення предикатів $X_1, \ldots, X_k$ є явно заданими, і побудова інтерпретації (функтора), що відображає одержану синтаксичну і семантичну категорію предикатних запитів способом, який є сумісним із твердженнями, що утворюють сам запит. Коли ми говоримо про явний спосіб задання значень предикатів X_i в синтаксичній категорії, то ми маємо на увазі, що для кожного терма $\ell : r >> \theta_i$ зворотний зсув X_i вздовж ℓ є відповідним підоб'єктом для r. Іншими словами, це буде означати, що $X_i(\ell)$ є істинним незалежно від набору тверджень, що утворюють предикатний запит. В даному випадку множина предикатів не вимагає введення систем обмежень, як і в класичних логічних Хорн-програмах.

В загальному випадку, якщо ми ідентифікуємо X_i підоб'єктом θ_i, то ми не можемо бути впевнені, що вище наведена властивість задовольняється. Тому нам потрібно знайти спосіб вільного під'єднання підоб'єкта θ_i для кожного X_i таким чином, що всі його ініціалізації будуть існувати і уявлятимуть собою відповідні підоб'єкти заданого коректного типу. Ми отримаємо нову категорію, яку ми будемо позначати через $K[X_1, \ldots, X_k]$.

Тепер ми можемо ввести поняття категорійної дедукції. Нехай ціль задано у вигляді послідовності атомарних цілей і твердження є парою, утвореною із цілі Ch і атомарної цілі (заголовка) $X_i(\ell)$. Використовуватимемо запис $X_i(\ell) >> Ch$. В першому наближенні будемо розглядати категорійну дедукцію, як послідовність кроків в транзитивній системі із мітками. Позначатимемо даний факт через $\sim>$. Таким чином якщо Z_1 і Z_2 є цілями, φ – підстановкою і t – твердженням виду $X_\ell(l_1) >> Ch$, тоді

$$Z_1 v \overset{\varphi, t}{\sim>} Z_2,$$

де $Z_1 = X_{J_1}(\varsigma_1), \ldots, X_{J_k}(\varsigma_k), \ldots, X_{J_l}(\varsigma_l)$ для деякої стрілки ς: $Y_1 >> \theta_k$;

$$Z_2 = \sigma^{\sim} X_{J_1}(\varsigma_1), \ldots, \varphi^{\sim} Ch, \ldots, \sigma^{\sim} X_{J_1}(\varsigma_\ell).$$

В даному випадку пара σ, φ є уніфікатором для ς і ς_1, і ми маємо пару стрілок замість одної, оскільки ми виконуємо уніфікацію стрілок із різних джерел (що відповідає операції попереднього переіменування термів).

Таким чином, категорійну дедукцію будемо розглядати як дедукцію в транзитивній системі $\sim>$. Категорійним спрощенням будемо вважати категорійну дедукцію, що закінчується порожньою ціллю. Для заданої дедукції $kd = Z_1 \overset{\sigma_1, t_1}{\longrightarrow\sim>} \ldots \overset{\sigma_k, t_k}{\longrightarrow\sim>} Z_k$, обчислюваний розв'язок для kd означимо через композицію $\sigma_k; \ldots; \sigma_1$.

Інтерпретацією в даному випадку буде функтор, що зберігає скінченні добутки

$$[F]: K[X_1, \ldots, X_k] >> S\ell t^{K^{\varnothing}},$$

що розширює Y – вбудування (тобто таке, що $[\theta]=H(F,\theta)$ для кожного $\theta \in O_k$) і виконує прив'язку підоб'єкта $H(F,\theta_i)$ до X_i. Можна показати, що для заданої прив'язки підоб'єктів для X_i – их існує тільки одна інтерпретація, що розширює дану прив'язку.

Тепер введемо оператор на множині інтерпретації R_Q, параметризація якого задана по відношенню до запиту Q

$$R_Q([F])(X_i)=\bigcup_{X_i(t)>>Ch\in Q} \mathrm{Im}_t([Ch]),$$

де $\mathrm{Im}_f(X)$ – є образом моностріки X вздовж стрілки f`.

Тому замість розгляду цілей, як моностріпок в категорії K, ми використаємо індексовану категорію над K. Об'єкт на шарі $\theta \in O_k$ буде категорійним відповідником цілі типу θ. Тобто, ми не виходитемо за рамки стандартної категорійної інтерпретації логіки першого порядку .

Означення 1. (*Категорійна стратегія*). $\wedge\Pi$-категорійною стратегією будемо вважати індексовану категорію Ξ_1 над базовою категорією K. Для кожного $\theta \in O_k$, об'єкти і стрілки в $\Xi_1\theta$ будемо називати формулами і доведеннями (абстрактного типу θ) відповідно. Будемо використовувати термін ціль, як синонім до формула. Для заданої цілі Z абстрактного типу θ і $f: r >> \theta$ в K і $f: Z=Z(f)$ є ініціалізацією для Z .

Будемо записувати $Z:\theta$ і $f:\theta$, як скорочені позначення для $Z \in O_Q$ і $f \in M_{r_{Q\theta}}$. Для заданої $\wedge\Pi$-категорійної стратегії, твердженням (абстрактного типу θ) є об'єкт tr із відповідною парою (Ch, Zh) цілей абстрактного типу θ. Позначимо даний факт як $Zh \overset{tr}{>>} Ch$.

Означення 2. (*Модифікаційний запит*). Модифікаційним запитом будемо вважати пару (Q,Ξ_1), де Ξ_1 є $\wedge\Pi$-категорійною стратегією, і Q – є множиною тверджень. Будемо говорити, що Q є запитом над Ξ_1.

Модифікаційний запит можна розглядати також як індексовану категорію Q над O_k, таку, що $Q(\theta)$ є категорією об'єктів абстрактного типу θ стрілок $tr: Zh >> Ch$ тверджень типу θ.

Нехай задано сигнатуру першого порядку M_{F_1}, утворену із множини F функціональних символів і множин $\prod$ — предикатних символів відповідної розмірності. Побудуємо категорію $T_{M_{F_1}}$, як алгебраїчну категорію на основі F. Об'єктами $T_{M_{F_1}}$ є натуральні числа, стрілками із k до l є l – кортежі із термів, які побудовані на основі множини змінних $\{w_1,\ldots,w_k\}$.

$$O_{T_{M_{F_1}}} = N\,,\; T_{M_{F_1}}(k,l) = S_{M_{F_1}}\left(\{w_1,\ldots,w_k\}\right)^l .$$

Тепер виконаємо побудову синтаксичної категорії $\Xi^l_{M_{F_1}}$ над T, заданої наступним чином:

1. Для кожного $k \in N$, $\Xi^l_{M_{F_1}}(k)$ є дискретною категорією атомарних цілей, утвореною із змінних $w_1,\ldots,w_k$.

2. Для $l =< l_1,\ldots,l_l > \;|k >> l$, $\Xi^l_{M_{F_1}}(l)$ є функтором, що задає відображення атомарної цілі Z в $Z[w_1/l_1,\ldots,w_l/l_l]$.

Припустимо тепер, що K є категорією скінчених добутків. Ми можемо розглядати K як зв'язану модель відповідної сигнатури, що описується багатьма абстрактними типами. Ми можемо побудувати синтаксичну стратегію для модифікаційних предикатних запитів, де терми будуть елементами результуючої категорії. Нехай $\prod$ – сигнатура предикатів над K, тобто фактично, множина предикатних символів відповідного типу в O_K. Будемо записувати $\pi : \theta$ якщо π є предикатним символом типу θ. Тоді ми можемо оголосити індексовану категорію Ξ^1_Π над K таку, що:

1. $\Xi^1_\Pi(\theta)$ дискретна категорія, об'єктами якої є пари $< \pi, f >$ такі, що $\pi : r \in \prod$ і $f : \theta >> r$ є стрілкою в K. Будемо записувати $\pi(f)$ замість $< \pi, f >$.

2. $\Xi^2_\Pi(\theta)$, де $F : r >> \theta$ є функтором, що задає відображення $\pi(t) \in Q_{\Xi^1_{\Pi(\theta)}}$ в $O(f,t)$.

Відмітимо, що якщо K є незв'язаною алгебраїчною категорією для сигнатури M_{F_1} на множині предикатних символів, то тоді Ξ^1_Π і $\Xi^1_{M_{F_1}}$ є ізоморфними.

Припустимо тепер, що ми маємо два предикатних символи π і $\pi\rho$ типу $r \times r$, і ми хочемо додати до синтаксичної категорійної стратегії властивість того, що $\pi\rho$ є симетрично замкнутим для π. Тоді ми довільним чином виконаємо приєднання до Ξ^1_Π двох стрілок в шарі $r \times r$

$$a_1 : \pi >> \pi\rho;\;\; a_2 : \pi >> \pi\rho(< p_2, p_1 >).$$

Одержимо нову категорійну стратегією $\Xi_{\theta}^{кр}$.

Функтори $\wedge\prod$ -категорійної стратегії будемо розглядати, як інтерпретації. Якщо $[F](F,\iota)$ є інтерпретацією із Ξ_1 в Ξ_2, тоді будемо позначати $F(x)$ через $[X]$ для кожного об'єкту або стрілки x в K. Більш того, для кожної цілі або доведення X в шарі θ ми позначимо $\iota_{\theta}(x)$ як $[X]_{\theta}$.

<u>Означення 3.</u> (*Модель модифікаційного предикатного запиту*). Для заданого запиту Q над категорійною стратегією Ξ_1 моделлю Q буде пара $([F], v)$, де $[F]: \Xi_1 \gg \Xi_2$ є інтерпретацією, і v є функцією, що виконує відображення твердження $Zh \overset{tr}{<<} Ch \in Q$ в стрілку $[Zh] \overset{v(tr)}{<<} [Ch]$.

Якщо ми розглянемо запит як індексовану категорію, то тоді v є функтором із Q в $\mathrm{T}(\Xi_2)$, де $\mathrm{T}: IKt \gg IKt$ є функтором, який задає відображення індексованої категорії над K в індексовану категорію над O_k, опускаючи всі стрілки в базовій категорії. Формально кажучи, якщо $\Xi_2 : K \gg Kt$, то ми маємо, що $\mathrm{T}(\Xi_2): O_k \gg Kt$ таке, що $\mathrm{T}(\Xi_2)(\theta) = \Xi_2(\theta)$.

В загальному випадку модель $Md: \Xi_1 \gg \Xi_2$ для запиту Q будемо розглядати, як один із видів ціленезалежних семантик для Q. Для заданої цілі Z абстрактного типу θ, відповідні семантики можна розглядати як клас стрілок, напрямлених на $Md_{\theta}(Z)$ в Ξ_2.

Розглянемо тепер $\wedge\prod$ -категорійну стратегію $\Xi_{M_F}^1$, запит Q і індексовану категорію Ξ_2 над $T_{M_{F_1}}$ таку, що:

1. $\Xi_2(k) = r_f\left(S_{M_{F_1}}(\varnothing)^k\right) \Xi_2(k) = r_f\left(S_{M_{F_1}}(\varnothing)^k\right)$, що є впорядкованою множиною, яка розглядається як категорія.

2. $\Xi_2(\iota)(X) = \{< \iota_1, \ldots, \iota_k > \mid \iota[w_1 / \iota_1, \ldots, w_k / \iota_k] \in K\}$. Іншими словами, переіндексований функтор дає нам факторизацію всіх кортежів термів X через ι.

Інтерпретація $[F]$ задає відображення атомарної цілі в $\Xi_{\theta}^1(k)$, тобто атомарної цілі із k вільних змінних в множину k-кортежів базових термів. Зокрема, якщо ми оголосимо $[V]_{\theta}$ як множину частково коректних базових відповідей для V в запиті Q, тоді можна виконати розширення $[F]$ моделі, виконуючи відображення твердження $V_1 \overset{tr}{<<} V_2$ в відображення включення

$[V_1] \subseteq [V_2]$. Можливо також виконати узагальнення введеної інтерпретації для роботи із абстрактною синтаксичною категорійною стратегією такою, як Ξ^1_{Π}.

Розглянемо $\wedge\prod$ -категорійну стратегію Ξ^1_{Π} і індексовану категорію Ξ^2 над K, таку, що :

1) для кожного $\theta \in O_k$, $\Xi^2(\theta) = r_f(H(1, K))$, яка є впорядкованою множиною, що розглядається, як категорія;

2) для кожного $f \in H_k(\theta, r)$, $\Xi^2(f)(X) = \{S \in H(1, \theta); f \in X\}$.

Інтерпретація $[F]$ задає відображення атомарної цілі типу θ на множину стрілок із граничного об'єкту для K в Q. Ці стрілки фактично є категорійними відповідниками базових термів.

Коли семантична стратегія є дискретною, то процедура інтерпретації із Ξ^1 в Ξ^2 може відображати кожен об'єкт із Ξ^1 в де-який об'єкт в Ξ^2, при умові, що таке відображення є обгрунтованим по відношенню до операції переіндексації. Хоча, в загальному випадку, може виникнути потреба в накладанні додаткових обмежень на процедуру відображення.

Розглянемо тепер $\wedge\prod$ -категорійну стратегію Ξ^2. Інтерпретація $[F]$ із Ξ^1 в Ξ^2 зводиться до відображення стрілок S_1 і S_2 на множину стрілок в Ξ^2. Це в свою чергу, означає, що $[\pi\rho] \supseteq [\pi]$ і $[\pi\rho] \supseteq [\pi(< p_1, p_2 >)]$, тобто фактично $[\pi\rho] \supseteq [\pi]; < p_1, p_2 >$.

Іншими словами, інтерпретація для $[\pi\rho]$ повинна містити як інтерпретацію для π так і для семантичного компонента.

Одним із можливих способів отримання моделі модифікаційного предикатного запиту Q в Ξ^1 є вільне приєднання тверджень Q до відповідних шарів індексованої категорії Ξ^1. В результаті отримаємо формальну модель для Q.

<u>Означення 4.</u> (*Формальна модель модифікаційного запиту*). Для заданого модифікаційного предикатного запиту Q над Ξ^1 будемо вважати формальною моделлю, якщо вона існує, модель $Md : \Xi^1 \gg \Xi^2$ таку, що для кожної іншої моделі Md' для Q існує унікальна інтерпретація I така, що $Md' = (Md; I)$.

Легко довести, що якщо Md і Md' – дві формальних моделі для запиту Q і двох різних $\wedge\Pi$ -категорійних стратегій Ξ^3 і Ξ^4, то тоді Ξ^3 і Ξ^4 є ізоморфними.

Нехай тепер для заданої цілі Z типу θ в модифікаційному запиті (Q, Ξ^1) ми прагнемо виконати дедукцію Z використовуючи як стрілки розміщені в шарах Ξ^1 так і твердження самого запиту. Тобто, якщо $x: Z \ll Ch$ є твердженням або стрілкою в Ξ^1, то власне потрібно виконати дедукцію із Z до Ch. Таким чином, єдині модифікації, які ми можемо безпосередньо застосовувати до Z задаються правилами (стрілками або твердженнями) типу θ. Можливим є виконання модифікації через використання твердження tr іншого типу r, такого, що Z і заголовок твердження tr стають рівними відразу після виконання їх переіндексації в шарі γ .

<u>Означення 5.</u> (*Модифікаційний уніфікатор*). Для двох заданих цілей $Z_1:\theta_1$ і $Z_2:\theta_2$ в $\wedge\prod$ -категорійній стратегії Ξ^1, модифікаційним уніфікатором для них будемо вважати з'єднувач $<i_1,i_2>$ стрілок базової категорії, таких, що

$$i_1:\gamma >> \theta_1, i_2:\gamma >> \theta_2 \text{ та } i_1 Z_1 = i_2 Z_2 .$$

Модифікаційні уніфікатори для пари цілей утворюватимуть категорію UM_{Z_1,Z_2}, де стрілки із $<i_1,i_2>$ до $<S_1,S_2>$ задаються на основі загального означення стрілок між з'єднувачами, тобто морфізмом $f: M_{dom}(i_1) >> M_{dom}(S_1)$, таким, що $f;S_1 = i_1$, і $f;S_2 = i_2$.

<u>Означення 6</u>. Найбільш загальним уніфікатором U_{mg} для цілей $Z_1:\theta_1$ і $Z_2:\theta_2$ в $\wedge\prod$ -категорійній стратегії Ξ^1 будемо вважати максимальний елемент в UM_{Z_1,Z_2} .

Тепер розглянемо індексовану категорію $\Xi^1_{M_{F_1}}$. Для заданих цілей $\pi_1(i_1):\theta_1;\pi_2(i_2):\theta_2$, модифікаційним уніфікатором є пара стрілок $S_1:\gamma >> \theta_1$ і $S_2:\gamma >> \theta_2$. Проте, не має уніфікатора між цілями $\pi_1(i_1)$ і $\pi_2(\iota_2)$ у випадку коли $\pi_1 \neq \pi_2$.

Можна виконати редукцію цілі $Z:\theta$ із стрілкою $f: Zh \ll Ch$ в шарі r , якщо існує стрілка $S: r >> \theta$ така, що $S\ Z = Zh$. Будемо називати пару $< S, f >$ із такими властивостями редукційною парою. Всі редукційні пари утворюють категорію, таку, що $i \in M_{r_k}$ є стрілкою із $< S_1, f_1 >$ в $< S_2, f_2 >$, якщо $S_1 = i;S_2$ і $i\ f_2 = f_1$. Найбільш загальною редукційною парою будемо вважати максимальну редукційну пару.

<u>Означення 7.</u> (*Категорійна дедукція*). Для заданого запиту (Q,Ξ^1), ми означимо транзитивну систему із мітками $(U_{\theta\in O_k}O_{\Xi^1\theta}, > f)$, де в якості об'єктів будуть :

1) Твердження зворотнього ланцюга $Z^{<S,i,tr>} >> i\ Ch$, якщо tr є твердженням типу $Zh \overset{tr}{<<} Ch$ і $<S,i>$ є уніфікатором для Z і Zh (тобто, що $S\ Z = i\ Zh$);

2) Стрілки зворотнього ланцюга $Z^{<S,f>} >> Ch$ якщо Z є ціллю в шарі θ, і $f : Zh << Ch$ є стрілкою в шарі r і $<S, f>$ є редукційною парою для Z.

Категорійною дедукцією будемо вважати дедукцію в даній транзитивній системі.

Якщо ми обмежимо кроки дедукції суто до виконання найбільш загальних уніфікаторів і найбільш загальних редукційних пар, то ми одержимо нову транзитивну систему $(U_{\theta\in O_k}O_{\Xi^1\theta}, > f_2)$ і відповідне поняття найбільш загальної категорійної дедукції.

Для заданої послідовності цілей $Z_0,\ldots,Z_i$ і послідовності міток $m_0,\ldots,m_{i-1}$, де $i \geq 0$, таких, що

$$Z_0^{m_0} > Z_1 .. Z_{i-1}^{m_{i-1}} > Z_i \,,$$

введемо категорійну дедукцію $Z - > * Z_i$, де $C = m_0,\ldots,m_{i-1}$ є рядком отриманим в результаті конкатенації всіх міток. Позначати через $\varnothing_z$ порожню дедукцію, що стартує із цілі Z.

<u>Означення 8.</u> Для заданої категорійної дедукції C, обчислюваною відповіддю для C будемо вважати (і відповідно позначати $Vd(C)$) деяку стрілку в K, означену наступним чином:

$$Vd() = id_\theta, \text{якщо } Z : \theta >>$$

$$Vd(< s, f >, C) = Vd(C); S >> \qquad Vd(< s, i >, C) = Vd(C); S.$$

Найбільш загальними обчислюваними відповідями будемо вважати відповіді, що відповідають найбільш загальній категорійній дедукції.

Для виконання застосування процедури категорійної резолюції до випадку премоноїдних структур на шарах індексованої категорії модифікаційних предикатних запитів введемо нове означення для уніфікатора.

Означення 9. (*Премоноїдний уніфікатор*). Для заданої премоноїдної $\wedge\prod$ -категорійної стратегії Ξ_1 над K і цілей $Z:\theta$ і $Z':r$ премоноїдним уніфікатором із Z' в Z будемо вважати кортеж $<S,i,Z_1,Z_2>$ такий, що існує $\gamma\in O_k$, де $S:\gamma\to\theta$, $i:\gamma\to r$, $Z_1:\gamma$, $Z_2:\gamma$, $Z_1\Theta_\gamma i\ Z'\Theta_\gamma Z_2 = S\ Z$.

Для заданих уніфікаторів $<S,i,Z_1,Z_2>$ і $<S',i',Z_1',Z_2'>$ стрілкою із першого уніфікатора в другий є стрілка f в K, така, що

$$dom(f)=dom(S),\ cod(f)=dom(S'),\ f\circ S'=S,\ f\circ i'-i,$$

$$f\ Z_1'=Z_1,\ f\ Z_2'=Z_2.$$

Тому премоноїдні уніфікатори для Z та Z утворюють категорію. Максимальні елементи даної категорії будемо називати найбільш загальними премоноїдними уніфікаторами.

Для заданої категорії $\Xi^{\Theta}_{M_{F_2}}$, розглянемо ціль $Z'=\pi_1(f_1),\ldots,\pi_k(f_k)$ типу θ і атомарну ціль $Z=\pi_i(f)$ типу r. Якщо ми маємо діаграму зворотного зсуву, де премоноїдні уніфікатори із Z' в Z мають максимальний елемент заданий через

$$<S,\iota,S^{\sim}(\pi_1(f_1),\ldots,\pi_{i-1}(f_{i-1})),S^{\sim}(\pi_{i+1}(f_{i+1}),\ldots,\pi_k(f_k))>$$

і якщо $\pi_i=\pi_j$ для деякого j та f, і f_j має найбільш загальний премоноїдний уніфікатор $N^K_{mg}(S',\iota')$, тоді максимальний елемент не є унікальним із точністю до ізоморфізму, оскільки хоча

$$<S,\iota,(S^{\sim})(\pi_1(f_1),\ldots,\pi_{j-1}(f_{j-1})),S^{\sim}(\pi_{j+1}(f_{j+1}),\ldots,\pi_k(f_k))>$$

є максимальним, проте він не є ізоморфним до попереднього елемента.

Якщо ми візьмемо транзитивну систему для категорійної дедукції модифікаційних предикатних запитів, яку ми означили і введемо премоноїдні уніфікатори замість звичайних уніфікаторів в правилах зворотного ланцюга, то отримаємо нову транзитивну систему для премоноїдних дедукцій модифікаційних предикатних запитів.

Означення 10. (*Премоноїдна дедукція*). Для заданої премоноїдної $\wedge\prod$ -категорійної стратегії Ξ^1, введемо транзитивну систему з мітками $\left(\bigcup_{\theta_{O_K}} O_{\Xi^1\theta},\sim>\right)$ із цілями в якості об’єктів, відповідно до наступних правил:

1. Для тверджень зворотного ланцюга $Z^{<S,\iota,Z_1,Z_2,tr>} \sim> Z_1\Theta\iota^{\sim}Ch\Theta Z_2$, якщо tr є твердженням виду $Zh \ll Ch$, тоді $< s,\iota,Z_1,Z_2 >$ є премоноїдним уніфікатором для Zh в Z .

2. Для стрілок зворотного ланцюга $Z \xrightarrow{<s,\,f>} \sim> Ch$, $(s, f : Zh \ll Ch)$ є редукційною парою для Z .

Премоноїдною дедукцією модифікаційних предикатних запитів будемо вважати дедукцію в даній транзитивній системі. Якщо обмежити правила для тверджень зворотного ланцюга лише для випадку при якому пара $< s,\iota >$ утворює найбільш загальний уніфікатор N_{mg} для Zh в Z , а правила стрілок зворотного ланцюга обмежити до випадку, при якому пара $< s,\iota >$ є найбільш загальною редукційною парою, то відповідні премоноїдні дедукції модифікаційних предикатних запитів можна означити тоді наступним чином:

1. $Vd(\varnothing_z) = id_\theta$, якщо $Z \in O_{\Xi^1\theta}$.
2. $Vd(< s, f > *e) = Vd(e) \circ s$.
3. $Vd(< s,\iota,Z_1,Z_2,tr > *e) = Vd(e) \circ s$.

Якщо ми працюємо із $\wedge\prod$ -категорійною стратегією $\Xi^1_{M_{F_1}}$, то найбільш загальна категорійна дедукція відповідає стандартній *Prolog*–резолюції для атомарних цілей і бінарних тверджень, за винятком можливо $\pi(\iota) \sim> \pi(\iota)$. Тепер розглянемо $\Xi^{\Theta}_{M_{F_1}}$ і премоноїдні дедукції. Припустимо, що Q є запитом над $\Xi^{\Theta}_{M_{F_1}}$ із тією властивістю, що для кожного твердження $Z \overset{tr}{\ll} Z'$, Z є атомарною ціллю $\pi(\iota)$. Очевидно, що найбільш загальні премоноїдні категорійні дедукції в даному випадку відповідають стандартній процедурі *Prolog*-резолюції. Більше того, якщо e є премоноїдною дедукцією, тоді $Vd(e)$ є її коректною обчислюваною відповіддю. Якщо ж e є найбільш загальною премоноїдною дедукцією, тоді $Vd(e)$ є простою обчислювальною відповіддю.

Проте, наприклад, для твердження виду $\pi(\iota_1),\pi(\iota_2) \overset{tr}{\ll} Z$ немає відповідника в стандартній процедурі *Prolog*-резолюції, оскільки в даному випадку це твердження не є еквівалентним парі тверджень $\pi(\iota_1) \overset{tr}{\ll} Z$ і $\pi(\iota_2) \overset{tr}{\ll} Z$. Якщо ми виберемо скінчені добутки, як структуру представлення, тоді одержимо проекційні стрілки $p : \pi_1(\iota_1), \pi_2(\iota_2) \to \pi_i(\iota_i)$. Далі, виконаємо підстановку в ціль $\pi_i(\iota_1)$ значення p_1, а тоді значення tr , щоби отримати Z .

Проте в премоноїдній структурі ми не маємо prj-стрілок. Тому ми не зможемо виконати редукцію $\pi_1(\iota_i)$ за допомогою твердження tr.

Використаємо введене означення премоноїдної дедукції для побудови моделі модифікаційного предикатного запиту Q в премоноїдній $\wedge\prod$ - категорійній стратегії Ξ^1.

Для цього спершу введемо поняття згладженої і простої премоноїдних категорійних дедукцій.

<u>Означення 11.</u> *Премоноїдну дедукцію будемо вважати згладженою,* якщо для кожного кроку $Z \overset{<s,\iota,d,Z_1,Z_2>}{\longrightarrow\!\!>} Z'$ матимемо, що $s = id_\theta$, коли Z знаходиться в шарі θ.

<u>Означення 12.</u> *Премоноїдну дедукцію будемо вважати простою*, коли немає двох послідовних кроків для стрілок зворотного ланцюга і не існує жодного кроку для стрілок зворотного ланцюга із f як ідентифікаційна стрілка.

Для заданої згладженої дедукції $e : Z \sim>* Z'$ в шарі θ і стрілки $l : r \to \theta$ в K, означимо нову згладжену дедукцію $l^{\sim} e'' Z^{\sim} \sim>* (Z')^{\sim}$ на шарі r виконуючи заміну:

1. Кожного кроку $Z_x \overset{<id_\theta, f>}{\longrightarrow\!\!>} Z_y$ на $Z_x \overset{<id_\theta, f>}{\longrightarrow\!\!>} Z_y$.

2. Кожного кроку $Z_1 \overset{<id_\theta,\iota,Z_1,Z_2,tr>}{\longrightarrow\!\!>} Z_2$ на $l^{\sim}(Z_x) \overset{<id_r,l\circ\iota,l^{\sim}(Z_1),l^{\sim}(Z_2),tr}{\longrightarrow\!\!>} l^{\sim}(Z_y)$.

Більше того, якщо $e : Z_1 \sim> Z_2$ є дедукцією із Z_1 типу θ, $Vd(e) = f$, тоді для кожного Z типу θ означимо нову дедукцію

$$Z\Theta e : Z\Theta Z_1 \sim>* f^{\sim} Z\Theta Z_2$$

через виконання індукції на структурі e:

1. $Z\Theta\varnothing_{Z_1} = \varnothing_{Z\Theta Z_1}$.

2. $Z\Theta(< s, f >* e) =< s, s^{\sim} Z\Theta f >* (s^{\sim} Z\Theta e)$.

3. $Z\Theta(< s,\iota, Z_x, Z_y, tr >* e) =< s,\iota, tr, s^{\sim} Z_x, Z_y >* (s^{\sim} Z\Theta\ell)$.

Подібним чином, можна оголосити ще одну нову дедукцію

$$\ell\Theta Z : Z_1\Theta Z \sim> Z_2\Theta f^{\sim} Z .$$

Тепер виконаємо побудову премоноїдної індексованої категорії Ξ^2 такої, що:

1. $\Xi^2\theta$ є підкатегорією простих премоноїдних дедукцій типу θ, із фіксованими доменами і ко-доменами.

2. Премоноїдна структура в $\Xi^2\theta$ задається через θ і через нейтральний елемент I_θ для $\Xi^1\theta$. Природні перетворення $\gamma, \upsilon \ i \ r$ є виділеними елементами.

3. Для кожного $f:\theta \to r$ в K, реіндексуючий функтор $\Xi^2 f$ задає відображення дедукції e в $f^{\sim} e$. Крім того, даний функтор зберігає премоноїдні структури. Таким чином, ми можемо виконати оголошення премоноїдної інтерпретації $[F] = (id_K, \eta)$ із Ξ^1 в Ξ^2 і функції вибору v для тверджень в Q такої, що:

1. $[f : Z >> Z']_\theta = Z' \overset{<id_\theta, f>}{\text{——}\sim>} Z$.

2. $v\left(Zh \overset{tr}{\longleftarrow} Ch \right) = Zh \overset{<id_\theta, id_\theta, I_\theta, I_\theta, tr>}{\text{——}\sim>} Ch, Z' \overset{<id_\theta, f}{\text{——}\sim>} Z$.

В результаті матимемо, що $([F], v)$ утворює премоноїдну модель для (Q, Ξ^1). Можливим є також виконання адаптації, побудованої конструкції до випадку, коли Ξ^1 не є чітко премоноїдною. В такому випадку, для кожного θ множина стрілок ϑ_x в $\Xi^2\theta$ задається множиною дедукцій $X \overset{<id_\theta, \vartheta_x>}{\text{——}\sim>} I\,\Theta X$, де ϑ_x в редукційних парах є природнім ізоморфізмом в $\Xi^1\theta$. Хоча, оскільки ця множина дедукцій повинна бути природною в X, ми повинні розглядати відношення еквівалентності на множині стрілок для $\Xi^2\theta$ таких, що, наприклад,

$$X\Theta Y \overset{<id_\theta, \vartheta_x \Theta Y>}{\text{——}\sim>} (X\Theta I)\Theta Y \overset{<s, \iota, X\Theta I, \vartheta, tr>}{\text{——}\sim>} (X\Theta I)\Theta \iota^{\sim} Ch$$

є еквівалентною до

$$X\Theta Y \overset{<s, \iota, X\Theta I, \vartheta, tr> X}{\text{——}\sim>} \Theta \iota^{\sim} Ch \overset{<id_\theta, \vartheta_x \Theta \iota^{\sim} Ch>}{\text{——}\sim>} (X\Theta I)\Theta \iota^{\sim} Ch.$$

Розглянемо премоноїдну $\wedge\prod$ –категорійну стратегію $\Xi^{\Theta}_{M_{F_2}}$ і семантичну $\wedge\prod$ -категорійну стратегію Ξ^2. Ми можемо побудувати модель $([F], v)$ для базових обчислюваних відповідей, через введення для кожного об’єкта Z :

$$[Z]_\theta = \{Vd(e) | e : Z \sim>^* Z'\}, \text{ де } Z' : 1 .$$

Якщо $f : Z_1 \to Z_2$ є стрілкою в шарі θ і e є дедукцією для Z_1 за умови, що $Vd(e) \in H(1,0)$, тоді $< id_\theta, f >^* e$ є дедукцією для Z_2 і

$$Vd(< id_\theta, f >^* e) = Vd(e) \in H(1,\theta).$$

Тому, $[Z_2]_\theta \supseteq [Z_1]_\theta$ і ми можемо виконати розширення $[F]$ до індексованого функтора:

$$[f : Z_1 \to Z_2]_\theta : [Z_1]_\theta \subseteq [Z_2]_\theta .$$

Те саме має місце і для твердження $Zh \overset{tr}{<<} Ch$, тому можемо оголосити

$$v(tr) = [zh]_\theta \subseteq [Ch]_\theta ,$$

що і дає нам шукану модель.

<u>Означення 13.</u> (*Премоноїдні семантичні* $\wedge\prod$ *-стратегії*). Премоноїдною семантичною $\wedge\prod$ -стратегією є премоноїдна $\wedge\prod$ -стратегія така, що:

1) вона є семантичною $\wedge\prod$ -категорійною стратегією;

2) кожний морфізм на шарах є центральним;

3) для кожного θ, як об'єкта базової категорії, премоноїдні функтори Θ_θ зберігають канонічні ко-границі для υ-ланцюгів.

Фактично друга умова є еквівалентною до вимоги того, щоб шари мали моноїдну структуру задану через $f_1 \Theta f_2 = (f_1 \Theta Z_2) \circ (Z' \Theta f_2) = (Z_1 \Theta f_2) \circ (f_1 \Theta Z'_2)$ для кожного $f_1 : Z_1 >> Z_1'$ і $f_2 : Z_2 >> Z_2'$. Можна було би також задати більш детальні обмеження на множину стрілок, але введення більшої степені загальності суттєво не вплине в даному випадку на ефективність формального апарату, який ми прагнемо побудувати.

У випадку, коли Ξ^1 і Ξ^2 є премоноїдними $\wedge\prod$ –стратегіями і $[F]$ є премоноїдною інтерпретацією, ми прагнемо отримати ланцюг премоноїдних інтерпретацій із премоноїдною ко-границею. Після чого можна виконати розширення отриманої ко-границі до рівня премоноїдної моделі.

Для $\eta' = R_Q(\eta)$ і $(\theta_1)' = R_Q(\theta_1)$, коли Z_1 і Z_2 є динамічними цілями матимемо:

$$\eta'_\theta(Z_1 \Theta_\theta Z_2) = \eta'_\theta(Z_1) \Theta_{F_\theta} \eta'_\theta(Z_2);$$

$$(\theta_1)'_{\theta, Z_1, \theta, Z_2} = (\theta_1)'_{\theta, Z_1} \Theta_\theta (\theta_1)'_{\theta, Z_2} .$$

Оскільки єдиними стрілками між динамічними цілями є нейтральні елементи, або r, ϑ, γ – компоненти премоноїдних структур, то зрозумілим стає і спосіб оголошення η' на множині стрілок, який дозволить одержати моноїдну інтерпретацію. Аналогічне оголошення потрібне також для канонічного морфізму для інтерпретацій $\omega : [F] \to R_Q([F])$:

$$\omega_{\theta, Z_1 \Theta_\theta Z_2} = \omega_{\theta, Z_1 \Theta_\theta \omega_\theta Z_2} .$$

Таким чином, тепер можна змінити означення для τ, додаючи випадок $\tau_{\theta, Z_1 \Theta_\theta Z_2} = \tau_{\theta, Z_1 \Theta_{\tau_\theta} Z_2}$, де Z_1, Z_2 є динамічними цілями.

Завдяки тому факту, що моноїдні оператори зберігають ко-границі для υ-ланцюгів матимемо, що коли побудовано ланцюг

$$[F]^{\varnothing} \xrightarrow{\omega} [F]^1 \xrightarrow{R_Q(\omega)} \ldots \xrightarrow{R_Q^k(\omega)} [F]^k \to \ldots,$$

то ко-границя $([F]^{\upsilon}, \{\tau_i\}_{i \in N})$ є саме випадком моноїдної ко-границі. Зокрема, для кожного $\theta \in O_k$ і $Z_1, Z_2 \in O_{\Xi^1 \theta}$ матимемо, що:

$$[Z_1 \Theta Z_2]^{\upsilon} = [Z_1]^{\upsilon} \Theta [Z_2]^{\upsilon};$$

$$(\tau_1)_{\theta, Z_1 \Theta Z_2} = (\tau_1)_{\theta, Z_1} \Theta_\theta (\tau_1)_{\theta, Z_2} .$$

Якщо D є ланцюгом інтерпретацій, то $[Z_1 \Theta Z_2]^{\upsilon}$ є ко-границею для $D' = D \circ Fb_\theta \circ OF_{Z_1 \Theta Z_2}$. Це в свою чергу означає, що $D'(i) = D(i)_\theta (Z_1 \Theta Z_2) = D(i)_\theta (Z_1) \Theta D(i)_\theta (Z_2)$, оскільки кожна $D(i)$ є моноїдною інтерпретацією і Θ зберігає канонічні ко-границі для υ-ланцюгів.

Розглянемо премоноїдну $\wedge\prod$-категорійну стратегію $\Xi^{\Theta}_{M_{F_2}}$, і премоноїдну семантичну стратегію Ξ^2. В премоноїдній інтерпретації $[F]$ такій, що

$$[Z]_\theta = \begin{cases} H(1, \theta), \text{ якщо} Z = I_\theta, \\ \varnothing, \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

виконується відображення моноїдної структури I_θ із $\Xi^{\Theta}_{M_{F_2}}$ в деяку моноїдну структуру із Ξ^2. Якщо виконати обчислення семантики фіксованого значення для Q виходячи із $[F]$, то отримаємо модель модифікаційного предикатного запиту.

Висновки та перспективи подальших досліджень: в даній статті виконано адаптацію введеної процедури категорійної резолюції до випадку премоноїдних структур на шарах індексованої категорії модифікаційних предикатних запитів. Введено нове означення премоноїдного уніфікатора і найбільш загального уніфікатора, в премоноїній категорійній стратегії. Введено транзитивну систему для премоноїдних дедукцій модифікаційних предикатних запитів, як розширення базової транзитивної системи для категорійної дедукції через введення премоноїдних уніфікаторів. Премоноїдна дедукція розглядається як дедукція в даній транзитивній системі. Для премоноїдної категорійної стратегії, введено транзитивну систему із мітками і цілями в якості об'єктів. Введено поняття згладженої і простої премоноїдних дедукції із коректними обчислюваними відповіддями. Виконано побудову премоноїдної індексованої категорії із підкатегорією простих премоноїдних дедукцій із фіксованими доменами і *ко*-доменами і із природніми перетвореннями в якості виділених елементів. Введені реіндексуючі функтори виконують відображення дедукції і зберігають введені премоноїдні структури, що дозволяє виконати оголошення скінченної премоноїдної інтерпретації, яка є основою для побудови премоноїдної моделі модифікаційних предикатних запитів. Показано спосіб побудови процедур одержання ланцюга премоноїдних інтерпретацій модифікаційних предикатних запитів із премоноїдною ко-границею, яка може бути розширена до рівня моделі модифікаційних предикатних запитів. Показано спосіб одержання моноїдної інтерпретації на основі аналізу стрілок між динамічними цілями. **Подальші дослідження** даного напряму будуть зосереджені на розширенні одержаної формальної моделі модифікаційних предикатних запитів та побудови її коректних імплементацій.

Список літератури: **1.** *Burhans D., Shapiro S.* Expanding the notion of answer in rule-based systems / Technical Report 99–07 // Department of Computer Science and Engineering, SUNY Buffalo. – 1999. – 155 p. **2.** *Comini M., Levi G., Meo M., Vitiello G.* Abstract diagnosis // Journal of Logic Programming, 1999. – .№ 39 (1–3). – P. 43– 93. **3.** *Comini M., Meo M.* Compositionality properties of SLD-derivations // Theoretical Computer Science, 1999. – № 211 (1&2). – P. 275 – 309. **4.** *Cousot P., Cousot R.* Temporal abstract interpretation // In Conference Record of the 27 Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages. – Boston, USA. – 2000. – ACM Press, New York, NY. – P. 12–25. **5.** *Gabbrielli M., Levi G., Meo M.* Resultants semantics for PROLOG // Journal of Logic and Computation, 1996. – № 6 (4). – P. 491–521. **6.** *Jacobs B.* Categorical Logic and Type Theory // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. – North Holland, Elsevier. – 1999. – 325 p. **7.** *Lipton J., McGrail R.* Encapsulating data in logic programming via categorical constraints / In Palamidessi C., Glaser H., Meinke K. Editors // Principles of Declarative Programming. – Vol. 1490 of Lecture Notes in Computer Science. – Springer Verlag, Berlin. – 1998. – P. 391–410. **8.** *Maleusieux F., Ridoux O., Boizumault P.* Abstract compilation of Prolog / In Jaar J. Editor // Joint International Conference and Symposium on Logic Programming. – Manchester, United Kingdom. – 1998. – MIT Press. – P. 130–144. **9.** *Power J., Robinson E.* Premonoidal categories and notions of computation // Mathematical Structures in Computer Science. – № 7 (5). – 1997. – P. 453–468. **10.** *Corradini A.,* *Asperti A.* A categorical model for logic programs: Indexed monoidal categories / In Proceedings REX Workshop '92 // Springer Lectures Notes in Computer Science. – 1992. – P. 5–36. **11.** *Corradini A., Montanari U.* An algebraic semantics for structured transition systems and its application to logic programs // Theoretical Computer Science. – № 103 (1). – 1992. – P. 51–106. **12.** *Barbuti R., Giacobazzi R., Levi G.* A. General Framework for Semantics-based Bottom-up Abstract Interpretation of Logic Programs // ACM Transactions on Programming Languages and Systems. – № 15 (1). – 1993. – P. 133–181. **13.** *Finkelstein S., Freyd P., Lipton J.* Logic programming in tau categories // In Computer Science Logic '94. – Vol. 933 of Lecture Notes in Computer Science. – Springer Verlag, Berlin. – 1995. – P. 249–263. **14.** *Шекета В.І.* Модифікаційні предикатні запити // Проблеми програмування. – 2004. – № 2–3. – С. 339–343 // Спеціальний випуск за матеріалами 4-ї МНПК “УкрПрог`2004”, 2004. – Київ, Кібернетичний центр НАН України. **15.** *Шекета В.І.* Ініціалізація еластичних семантик над простором Гербранда для модифікаційних предикатних запитів // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах”. – м. Хмельницький. – 2003 – № 2 (22). – С. 13–18. **16.** *Шекета В.І.* Аналіз семантики шаблонів виклику модифікаційних предикатних запитів для інформаційних систем на основі баз даних і знань // Комп’ютерна інженерія та інформаційні технології. – Вісник національного університету “Львівська політехніка”. – Львів. – 2003. – № 496. – С. 217–228 .

Поступила в редакцію 10.09.2005